

SUBIECTUL III (30p) Varianta 1

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Pentru $a = -1$, să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** b) Să se rezolve ecuația $\det(A) = 0$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că $A^2 + A = O_3$.
- 5p** d) Pentru $a = -1$ să se calculeze $B - AB$.
- 5p** e) Să se demonstreze că matricea $B - I_3$ este inversabilă.
- 5p** f) Pentru $a = 1$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

SUBIECTUL III (30p) Varianta 2

Fie mulțimea de matrice $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

- 5p** **a)** Să se verifice dacă matricea nulă $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .
- 5p** **b)** Să se calculeze $\det(A)$.
- 5p** **c)** Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) \in M$.
- 5p** **d)** Să se arate că $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$, pentru oricare matrice $A(a), A(b) \in M$.
- 5p** **e)** Să se arate că există o matrice $A(e) \in M$, cu proprietatea că $A(a) \cdot A(e) = A(a)$, $\forall A(a) \in M$.
- 5p** **f)** Să se demonstreze că $2A(xy) = A(x) \cdot A(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 3

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** **a)** Pentru $a = 2$, să se determine matricea $A^2 - 3A + 5I_3$.
- 5p** **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 3$.
- 5p** **c)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** **d)** Pentru $a = 0$ să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** **e)** Pentru $a = 0$ să se rezolve ecuația matricială $AX = B$.
- 5p** **f)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care are loc egalitatea $AC = CA$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 4

Se consideră matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = M + aI_2$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A .

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 16$.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p **d)** Pentru $a = 1$, să se rezolve ecuația matricială $AX = M$.

5p **e)** Să se arate că $A^2 = 2aA - a^2I_2$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine matricea $A^3 - a^2(3 \cdot M + a \cdot I_2)$, unde $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 5

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 \\ b & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** **a)** Să se determine matricea $M = AB + BA$.
- 5p** **b)** Pentru $a = 2$, să se determine valorile parametrului real b , pentru care $\det(A) = 5$.
- 5p** **c)** Pentru $b = 1$, să se determine valorile parametrului real a , pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** **d)** Știind că parametrii reali a și b verifică relația $b \neq 6a$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** **e)** Pentru $a = 0$ și $b = 1$, să se rezolve ecuația matricială $AXB = C$.
- 5p** **f)** Pentru $a \neq 0$, să se determine perechile de numere reale (a, b) , pentru care relația $AB = BA$ este adevărată.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 6

Fie matricele $M = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = M + 2a \cdot I_2$, $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine matricea A .

5p **b)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 16$.

5p **c)** Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p **d)** Pentru $a = \frac{1}{2}$, să se rezolve ecuația matriceală $AX = M$.

5p **e)** Să se arate că $A^2 = 4aA - 4a^2 I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **f)** Să se determine matricea $A^3 - 4a^2 (3M + 2a \cdot I_2)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 7

Fie mulțimea de matrice $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$

- 5p** a) Să se verifice dacă matricea $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .
- 5p** b) Să se calculeze $\det(A(a))$.
- 5p** c) Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) \in M$.
- 5p** d) Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci are loc egalitatea $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$.
- 5p** e) Să se arate că există o matrice $A(e) \in M$, cu proprietatea că $A(a) \cdot A(e) = A(a)$, $\forall A(a) \in M$.
- 5p** f) Să se arate că $A(2xy) = A(x) \cdot A(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 8

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases} ax + y + 3z = 11 \\ y - az = -1 \\ x + 3y + z = 12 \end{cases}$ unde $x, y, z \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Să se determine A^2 .

5p **b)** Să se calculeze determinantul matricei A .

5p **c)** Pentru $a = 0$ să se calculeze $A^2 - 3A$.

5p **d)** Să se determine valorile parametrului real a pentru care tripletul $(1, 3, 2)$ verifică prima ecuație a sistemului (S).

5p **e)** Să se determine valorile parametrului real a , pentru care sistemul (S) admite soluție unică.

5p **f)** Pentru $a = 2$, să se determine soluția sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) Varianta 9

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt parametri reali.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .

5p b) Pentru $b = 5$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 17$.

5p c) Pentru $a = 2$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.

5p d) Pentru $a = 2$ și $b = 1$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p e) Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 - x - 5 = 0$ ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 . Dacă $a = x_1$ și $b = x_2$ să se calculeze determinantul matricei A .

5p f) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ 3x + y + z = 10 \\ x = 2 \end{cases}$$
, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 10

Fie matricele $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = M - 3aI_2$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine matricea A .

5p b) Să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 36$.

5p c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p d) Pentru $a = \frac{1}{3}$, să se rezolve ecuația matricială $AX = M$.

5p e) Să se arate că $A^2 = -6aA - 9a^2I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se determine matricea $A^3 - 27a^2(M - aI_2)$, unde $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 11

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 6 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Pentru $a = 0$, să se determine matricea $A^2 + 2A - 4I_3$.
- 5p** b) Pentru $a = 0$, să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** c) Pentru $a \in \mathbb{R}$, să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** d) Să se determine valorile lui a pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** e) Pentru $a = 0$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** f) Pentru $a = 0$, să se rezolve ecuația matricială $A^2 + X = B$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 12

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & b \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt parametri reali.

- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** b) Pentru $b = 3$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = -12$.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** d) Pentru $a = 1$ și $b = 0$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 - 2x - 3 = 0$ ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 . Dacă $a = x_1$ și $b = x_2$ să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** f) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ y = 3 \\ 2x + 3y + 2z = 15 \end{cases}, \text{ unde } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

SUBIECTUL III (30p) Varianta 13

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se determine matricea $M = AB - BA$.
- 5p** b) Să se determine valorile parametrului real b , pentru care $\det(A) = 6$.
- 5p** c) Pentru $b = 1$, să se arate că matricea A este inversabilă, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 5p** d) Pentru $b \neq 0$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Pentru $a = 1$ și $b = 1$, să se rezolve ecuația matricială $AXB = C$.
- 5p** f) Să se determine perechile de numere reale (a, b) pentru care relația $AB = BA$ este adevărată.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 14

Fie matricele $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = M + 3a \cdot I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se verifice că matricea $A = \begin{pmatrix} 3a+4 & -2 \\ 8 & 3a-4 \end{pmatrix}$.
- 5p** b) Să se determine valorile parametrului real a , pentru care $\det(A) = 9$.
- 5p** c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** d) Pentru $a = \frac{1}{3}$, să se rezolve ecuația matricială $AX = M$.
- 5p** e) Să se verifice că $A^2 = 6aA - 9a^2 I_2$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Să se arate că $A^3 = 27a^2 (M + aI_2)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 15

Fie mulțimea de matrice $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

- 5p** a) Să se verifice dacă matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ matricea $A(a) \in M$ este inversabilă.
- 5p** c) Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) \in M$.
- 5p** d) Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$.
- 5p** e) Să se arate că există o matrice $A(e) \in M$, cu proprietatea că $A(a) \cdot A(e) = A(a)$, oricare ar fi $A(a) \in M$.
- 5p** f) Să se arate că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 16

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} b & 1 & 2 \\ -3 & a & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt parametri reali.

- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** b) Pentru $b = 2$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 17$.
- 5p** c) Pentru $a = 1$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** d) Pentru $a = 1$ și $b = 1$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 - 5x - 8 = 0$ ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 . Dacă $a = x_1$ și $b = x_2$ să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** f) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ -3x + y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 9 \end{cases}$$
, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 17

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 4 & 2b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se determine matricea $M = AB - BA$.
- 5p** b) Pentru $a = 2$, să se determine valorile parametrului real b , pentru care $\det(A) = -6$.
- 5p** c) Pentru $b = 2$ să se determine valorile parametrului real a , pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** d) Dacă parametrii reali a și b verifică relația $b \neq 2a$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Pentru $a = 0$ și $b = \frac{1}{2}$, să se rezolve ecuația matricială $AXB = C$.
- 5p** f) Să se determine perechile de numere reale (a, b) pentru care relația $AB = BA$ este adevărată.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 18

Fie sistemul (S) $\begin{cases} x - ay + 2z = 6 \\ 2x + y = 7 \\ 2ax + y + 3z = 13 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se determine matricea A^2 .
- 5p** b) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** c) Pentru $a = 0$, să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relația $B - 2A = A^2$.
- 5p** d) Să se determine valorile parametrului real a pentru care tripletul $(3, 1, 2)$ verifică prima ecuație a sistemului (S).
- 5p** e) Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul (S) admite soluție unică.
- 5p** f) Pentru $a = 1$, să se determine soluția sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) Varianta 19

Fie mulțimea de matrice $M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

- 5p** a) Să se verifice dacă matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .
- 5p** b) Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbb{R}$ matricea $A(a) \in M$ este inversabilă.
- 5p** c) Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) \in M$.
- 5p** d) Să se arate că dacă $A(a), A(b) \in M$, atunci $A(a) \cdot A(b) = A(b) \cdot A(a)$.
- 5p** e) Să se arate că există o matrice $A(e) \in M$, cu proprietatea că $A(a) \cdot A(e) = A(a)$, pentru orice $A(a) \in M$.
- 5p** f) Să se arate că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 20

Fie sistemul (S) $\begin{cases} -3x + 2y + az = -2 \\ ax + z = 7 \\ x + y + 3z = 10 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine matricea A^2 .

5p b) Să se calculeze determinantul matricei A .

5p c) Pentru $a = 0$, să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relația $5A + B = A^2$.

5p d) Să se determine valorile parametrului real a , pentru care tripletul $(2, -1, 3)$ verifică prima ecuație a sistemului (S).

5p e) Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul (S) admite soluție unică.

5p f) Pentru $a = 2$, să se determine soluția sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) Varianta 21

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Pentru $a = 1$, să se determine matricea $A^2 - 2A + 3I_3$.
- 5p** b) Să se determine valorile parametrului real a , pentru care $\det(A) = a - 3$.
- 5p** c) Să se determine valorile parametrului real a , pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** d) Pentru $a = 0$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Pentru $a = 0$, să se rezolve ecuația matricială $AX = B$.
- 5p** f) Să se determine valorile parametrului a pentru care are loc egalitatea $AC = CA$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 22

Fie sistemul (S) $\begin{cases} 2ax + y + z = 4 \\ 2x + y = -3 \\ 2x + ay + 2z = 5 \end{cases}$, cu $x, y, z \in \mathbb{R}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze determinantul matricei A .

5p b) Să se determine matricea $(A - I_3)^2$.

5p c) Pentru $a = -1$ să se determine matricea $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care verifică relația $B - A = A^2 + I_3$.

5p d) Să se determine valorile parametrului real a pentru care tripletul $(-1, -1, 3)$ verifică prima ecuație a sistemului (S).

5p e) Să se determine valorile parametrului real a pentru care sistemul (S) admite soluție unică.

5p f) Pentru $a = -1$, să se determine soluția sistemului (S).

SUBIECTUL III (30p) Varianta 23

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine matricea $M = AB - BA$.

5p b) Pentru $a = -3$, să se determine valorile parametrului real b pentru care $\det(A) = 6$.

5p c) Pentru $b = 8$ să se determine valorile parametrului real a pentru care matricea A este inversabilă.

5p d) Știind că parametrii reali a și b verifică relația $3b \neq 8a$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p e) Pentru $a = 1$ și $b = 3$, să se rezolve ecuația matricială $AXB = C$.

5p f) Să se determine perechile de numere reale (a, b) pentru care are loc egalitatea $AB = BA$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 24

Fie matricele $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = M + 2a \cdot I_2$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine matricea A .

5p b) Să se determine valorile parametrului real a , pentru care $\det(A) = 36$.

5p c) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p d) Pentru $a = \frac{1}{2}$, să se rezolve ecuația matricială $AX = M$.

5p e) Să se verifice că $A^2 = 4aA - 4a^2 I_2$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se arate că $A^3 = 4a^2 (3M + 2aI_2)$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 25

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt parametri reali.

- 5p** a) Să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** b) Pentru $b = 4$, să se determine valorile parametrului real a pentru care $\det(A) = 5$.
- 5p** c) Pentru $a = 2$, să se determine valorile parametrului real b pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** d) Pentru $a = 2$ și $b = 0$, să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Fie ecuația de gradul al doilea $x^2 - 4x - 7 = 0$ ale cărei soluții sunt x_1 și x_2 . Dacă $a = x_1$ și $b = x_2$ să se calculeze determinantul matricei A .
- 5p** f) Să se rezolve sistemul de ecuații
$$\begin{cases} 2x + z = 5 \\ z = -1 \\ x + y + z = 4 \end{cases}, \text{ unde } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

SUBIECTUL III (30p) Varianta 26

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ (a^2 - 1)x + 6y = 9 \end{cases}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a^2 - 1 & 6 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$, pentru $a = 2$.

5p b) Pentru $a = 2$, să se verifice egalitatea $A^2 = 7A$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.

5p d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, știind că perechea $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ este soluție a sistemului (S).

5p e) Să se rezolve sistemul (S) pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

5p f) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul să admită o soluție (x_0, y_0) cu $x_0 \in \mathbb{Z}$ și $y_0 \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 27

Fie sistemul de ecuații (S)
$$\begin{cases} x + y + (a^2 + 2)z = 1 \\ x + (a^2 + 2)y + z = 1 \\ (a^2 + 2)x + y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a^2 + 2 \\ 1 & a^2 + 2 & 1 \\ a^2 + 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Pentru $a = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se rezolve sistemul (S), pentru $a = 0$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$ să fie soluție a sistemului (S).

5p d) Să se arate că $\det(A) < 0$, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$.

5p e) Știind că (t, u, v) este soluție a sistemului (S) să se calculeze $t + u + v$, pentru $a \in \mathbb{R}$.

5p f) Să se arate că dacă (t, t, t) este soluție a sistemului (S), atunci $t \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 28

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A + I_3)$.
- 5p** b) Să se calculeze $A + {}^tA$, unde tA este transpusa matricei A .
- 5p** c) Să se calculeze A^3 .
- 5p** d) Să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** e) Să se verifice egalitatea $(A + I_3)(A^2 - A + I_3) = 2I_3$.
- 5p** f) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A + pI_3$ nu este inversabilă.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 29

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det({}^t A)$, unde ${}^t A$ este transpusa matricei A .
- 5p** b) Să se calculeze suma elementelor matricei $A - aI_2$.
- 5p** c) Să se verifice egalitatea $(A - aI_2)^2 = 5I_2$.
- 5p** d) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, matricea A este inversabilă.
- 5p** e) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$ să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** f) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 30

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ și $B = A - aI_2$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p a) Să se calculeze produsul elementelor matricei B .
- 5p b) Să se arate că A este matrice inversabilă, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Să se verifice egalitatea $B^2 + I_2 = O_2$.
- 5p d) Să se calculeze $B + B^{-1}$, unde B^{-1} este inversa matricei B .
- 5p e) Să se calculeze $B + B^2 + B^3 + B^4$.
- 5p f) Să se arate că nu există $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $\det(A) = 2009$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 31

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $B^2 - 3B$.
- 5p** b) Să se verifice egalitatea $BA = 3B$.
- 5p** c) Să se arate că $AB \neq BA$.
- 5p** d) Să se arate că toate elementele matricei $(AB)^2 - (BA)^2$ sunt egale.
- 5p** e) Să se determine $p \in \mathbb{R}$ astfel încât $(A+B)^2 = p(A+B)$.
- 5p** f) Să se calculeze $\det\left((AB)^{2009} + (BA)^{2009}\right)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 32

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2ax + (a^2 + 1)y = 2 \end{cases}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2a & a^2 + 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Pentru $a = 1$, să se verifice egalitatea $A(A - 3I_2) = O_2$.
- 5p** b) Să se arate că $\det(A) \geq 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x = -1$, $y = 2$ este soluție a sistemului (S).
- 5p** d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea sistemului (S) este inversabilă.
- 5p** e) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul (S) admite o soluție (x_0, y_0) cu $x_0, y_0 \in \mathbb{N}$.
- 5p** f) Să se rezolve sistemul (S) pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 33

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(aA)$.
- 5p** b) Pentru $a = 2$ să se verifice egalitatea $XA = (x + y)B$.
- 5p** c) Să se arate că $A^2 = 3A$.
- 5p** d) Să se determine $a, x, y \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $({}^tB) \cdot X = A^2$, unde tB este matricea transpusă a matricei B .
- 5p** e) Să se arate că matricea $I_2 + pA$ este inversabilă pentru orice $p \neq -\frac{1}{3}$.
- 5p** f) Să se determine $b \in \mathbb{R}$ astfel încât $I_2 + bA = (I_2 + A)^{-1}$, unde $(I_2 + A)^{-1}$ este inversa matricei $I_2 + A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 34

Se consideră matricele $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ a^2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A(0))$.
- 5p** b) Să se verifice egalitatea $A(a)B = X$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A(a) - A(-a) = O_3$.
- 5p** d) Să se calculeze $X \cdot {}^tB - A(a)$, unde tB este transpusa matricei B .
- 5p** e) Să se arate că $\det(A(a))$ este număr par pentru orice $a \in \mathbb{Z}$.
- 5p** f) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A(a)X = B$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 35

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}$, cu $a, x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A + I_3)$.

5p b) Să se calculeze $4A + 5I_3$.

5p c) Să se arate că $A^2 = 4A + 5I_3$.

5p d) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $\det(zA) = 40$.

5p e) Să se arate că dacă $\begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix}$ este soluție a ecuației matriciale $AX = B$, atunci $t = u = v$.

5p f) Să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .

SUBIECTUL III (30p) Varianta 36

Fie sistemul de ecuații (S) $\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = a \\ x + y - z = a \end{cases}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A + I_3)$.
- 5p** b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care $(-2, -2, -2)$ este soluție a sistemului (S).
- 5p** c) Să se rezolve sistemul (S) pentru $a = 0$.
- 5p** d) Să se verifice egalitatea $A^2 + A = 2I_3$.
- 5p** e) Să se determine A^{-1} , unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** f) Să se determine soluția (t, u, v) a sistemului (S) care verifică relația $t + 2u + 3v = -6$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 37

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A - I_3)$.

5p b) Să se calculeze $A^2 - 5A + 4I_3$.

5p c) Să se arate că $A^{-1} = -\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I_3$, unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p d) Să se verifice egalitatea $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

5p e) Să se determine $y, z \in \mathbb{R}$, pentru care $A^2 + yA + zI_3 = O_3$.

5p f) Să se calculeze $\det(aA + {}^tA)$, unde tA este transpusa matricei A și $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 38

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze A^2 .
- 5p** b) Să se arate că $\det(A) = \det(A^2)$.
- 5p** c) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A^2 + xA + yI_2 = O_2$.
- 5p** d) Să se verifice egalitatea $A + A^2 + A^3 = O_2$.
- 5p** e) Să se calculeze $A + A^2 + \dots + A^{28}$.
- 5p** f) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ matricea $aI_2 + A$ este inversabilă.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 39

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $B - 2C$.
- 5p** b) Să se demonstreze că $\forall a \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea $\det(A + B + C) = 0$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A + B + C \neq O_2$.
- 5p** d) Să se scrie sistemul de ecuații cu necunoscutele x, y, z obținut din egalitatea $xA + yB + zC = O_2$.
- 5p** e) Pentru $a = 0$ să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $xA + yB + zC = O_2$.
- 5p** f) Să se arate că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ verifică egalitatea $xA + yB + zC = O_2$, atunci $x = y = z$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 40

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze A^3 .
- 5p** b) Să se verifice egalitatea $I_2 + A^3 = (I_2 + A)(I_2 - A)$.
- 5p** c) Să se arate că $\det(aI_2 + aA) \geq 0$ pentru oricare $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** d) Să se arate că, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$, matricea $I_2 + aA$ este inversabilă.
- 5p** e) Să se arate că, pentru oricare $a \in \mathbb{R}$, există $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $(I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2$.
- 5p** f) Să se determine matricea $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -x & -y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică simultan condițiile:

SUBIECTUL III (30p) Varianta 41

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{M(a, b) = aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

5p a) Să se determine suma elementelor matricei $M(1, 1)$.

5p b) Să se verifice egalitatea $A^2 + I_2 = O_2$.

5p c) Să se calculeze $\det(M(a, b))$.

5p d) Să se determine matricele neinvertibile din mulțimea G .

5p e) Știind că $M(a, b)$ este matrice inversabilă, să se arate că $M^{-1}(a, b) = M\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$, unde

$M^{-1}(a, b)$ este inversa matricei $M(a, b)$.

5p f) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$, pentru care $M^{-1}(a, 1) \in G$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 42

Fie matricele $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sqrt{2} + \sin x \\ \sqrt{2} + \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $0^\circ < x < 180^\circ$.

- 5p** a) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(60^\circ)$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det\left(A(60^\circ) + \frac{1}{2}I_2\right)$.
- 5p** c) Să se verifice că $\det(A(x)) = 1$.
- 5p** d) Să se calculeze $A^2(x)$.
- 5p** e) Să se verifice egalitatea $A^{-1}(x) + A(x) = O_2$, $0^\circ < x < 180^\circ$, unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** f) Să se determine valorile lui x pentru care $A(x) = A(180^\circ - x)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 43

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Pentru $a = 1$, $b = 0$, să se arate că $\det(A) + \det(I_3) = 0$.
- 5p** b) Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, să se calculeze A^2 .
- 5p** c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $aA + bI_3 = O_3$.
- 5p** d) Să se arate că matricea A este neinvertibilă dacă și numai dacă $a = b = 0$.
- 5p** e) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$, pentru care $A^{-1} = A$, unde A^{-1} este inversa matricei A .
- 5p** f) Pentru $a = \frac{1}{2}$, să se determine valorile lui $b \in \mathbb{R}$ pentru care $A^2 = I_3$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 44

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A + 2I_2)$.
- 5p** b) Să se calculeze X^2 .
- 5p** c) Să se verifice egalitatea $\det(X^2) = (\det(X))^2$.
- 5p** d) Să se verifice egalitatea $X^2 - (a + d)X + \det(X)I_2 = O_2$.
- 5p** e) Să se arate că dacă $\det(X) = 0$, atunci $X^2 = (a + d)X$.
- 5p** f) Să se rezolve, în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuația $X^2 = A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 45

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- 5p** a) Pentru $a = b = c = 1$, să se calculeze $A - 2I_3$.
- 5p** b) Pentru $a = b = c = 1$, să se verifice egalitatea $A^2 = 3A$.
- 5p** c) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$, pentru care $\det(B) = 0$.
- 5p** d) Să se determine matricele A pentru care $a = b = c$ și $\det(A) = 0$.
- 5p** e) Să se arate că $\det(A) = (c - 1)\det(B) + (a - 1)(b - 1)$.
- 5p** f) Să se arate că există numere $a, b, c \in \mathbb{Z}$ pentru care $\det(A) = 2009$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 46

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_2 + aA$, unde $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se verifice că $A^2 = O_2$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(M(2))$.
- 5p** c) Să se arate că $(A + I_2)^2 = M(2)$.
- 5p** d) Să se determine inversa matricei $M(1)$.
- 5p** e) Să se demonstreze că $M(a) \cdot M(b) = M(a + b)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p** f) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $M^{2009}(x) = M(2009)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 47

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(I_2 + A)$.
- 5p** b) Să se calculeze $(A - I_2)(A + I_2)$.
- 5p** c) Să se verifice egalitatea $(A - I_2)^2 = O_2$.
- 5p** d) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$, pentru care are loc egalitatea $A^2 + xA + yI_2 = O_2$.
- 5p** e) Să se determine inversa matricei $2I_2 - A$.
- 5p** f) Să se determine matricele $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația $Y^2 = A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 48

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$D = aA + bB + (1 - a - b)C, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se calculeze $\det(AB)$.

5p b) Să se calculeze $AB - BA$.

5p c) Să se verifice egalitatea $A^2 + B^2 = 2I_3$.

5p d) Să se determine suma elementelor matricei D .

5p e) Să se calculeze $\det(D^2)$.

5p f) Să se determine numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ pentru care $\det(D + {}^tD) = \det({}^tDD)$, unde tD reprezintă transpusa matricei D .

SUBIECTUL III (30p) Varianta 49

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a+1 & -3 \\ a-5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se verifice că $B^2 = 2B + 3I_2$.
- 5p** b) Să se rezolve ecuația $\det(A + B) = 19$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să nu fie inversabilă.
- 5p** d) Pentru $a = 1$ să se arate că $A^2 = 8A$.
- 5p** e) Să se arate că matricea B este inversabilă și $B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot (B - 2I_2)$.
- 5p** f) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că există $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = m \cdot (A + I_2)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 50

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $C = I_3 + A$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(C)$.
- 5p** b) Să se calculeze A^3 .
- 5p** c) Să se verifice egalitatea $(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3$.
- 5p** d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care $(I_3 + aA)(I_3 + A + A^2) = I_3$.
- 5p** e) Să se determine C^{-1} , unde C^{-1} este inversa matricei C .
- 5p** f) Să se determine numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$ care verifică egalitatea $xC + yA^2 + zI_3 = A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 51

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze suma elementelor matricei $M = 3A + I_2$.

5p b) Să se arate că $A^2 + A = O_2$.

5p c) Să se calculeze $\det(I_2 - A^2)$.

5p d) Să se determine numărul real a , astfel încât $A^3 = a \cdot A$.

5p e) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2009}$.

5p f) Să se arate că $(I_2 + A)^{2009} \neq I_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 52

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $C = AB - BA$.

5p a) Să se determine $A^2 + B^2$.

5p b) Să se arate că $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

5p c) Să se calculeze $\det(C^2)$.

5p d) Să se arate că are loc egalitatea $C^3 + C^2 = C + I_2$.

5p e) Să se calculeze suma elementelor matricei $C + C^2 + C^3 + \dots + C^{2009}$.

5p f) Să se determine matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $CX = B$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 53

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(2A)$.

5p b) Să se calculeze $AB - BA$.

5p c) Să se determine inversa matricei A .

5p d) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -x + y = -1 \end{cases}$.

5p e) Să se arate că $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$.

5p f) Să se determine matricea X astfel încât $A \cdot X \cdot B = I_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 54

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

5p a) Să se verifice că $A^2 = M(2,1)$.

5p b) Să se calculeze $\det(A + I_3)$.

5p c) Să se arate că $M(a,b) = aI_3 + bA$, pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se demonstreze că dacă $X, Y \in G$, atunci $X \cdot Y \in G$.

5p e) Să se arate că inversa matricei A este matricea $B = \frac{1}{2} \cdot (A^2 - 3I_3)$.

5p f) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $M(2,1) \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 55

Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, c \in (0, +\infty), b \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $I_2 \in G$.

5p b) Să se calculeze determinantul matricei $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} + I_2$.

5p c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

5p d) Să se arate că dacă $C \in G$, atunci există $D \in G$ astfel încât $CD = DC = I_2$.

5p e) Să se găsească două matrice $U, V \in G$, astfel încât $UV \neq VU$.

5p f) Să se determine o matrice $M \in G$ cu $\det(M) = 2009$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 56

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $I_2 \in G$.

5p b) Să se calculeze $\det A(3)$.

5p c) Să se arate că $A(x)A(y) = A(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se arate că $A(x)A(-x) = I_2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p e) Să se calculeze $A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) \cdot A(4) \cdot A(5)$.

5p f) Să se determine $t \in \mathbb{R}$, astfel încât $A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(2009) = A(t)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 57

Fie matricele $B = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \mid A^2 = I_2 \right\}$.

5p a) Să se calculeze produsul elementelor matricei $B + C$.

5p b) Să se arate că $B + C \notin G$.

5p c) Să se calculeze $\det(B + C)$.

5p d) Să se determine $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $BX = C$.

5p e) Să se arate că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & -1 \end{pmatrix} \in G$, pentru oricare $n \in \mathbb{Z}$.

5p f) Să se determine toate matricele $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$ cu proprietatea că $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 58

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A + I_3)$.
- 5p** b) Să se arate că $A^3 = O_3$.
- 5p** c) Să se arate că $AB = BA = I_3 - B$.
- 5p** d) Să se calculeze $(A + I_3)B$.
- 5p** e) Să se arate că $\det((I_3 + A^2)(I_3 - A^2)) = 1$.
- 5p** f) Să se calculeze $A + 2A^2 + 3A^3 + \dots + 2009A^{2009}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 59

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(A + 3I_2)$.
- 5p** b) Să se calculeze A^2 .
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $(I_2 + A)(I_2 + aA) = I_2$.
- 5p** d) Să se rezolve sistemul $\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -2x - 3y = 2009 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** e) Să se verifice că $\det(I_2 + A^6) = 1$.
- 5p** f) Să se determine matricea $I_2 + 2A + 3A^2 + \dots + 2009A^{2008}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 60

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

5p a) Să se arate că $I_2 \in G$.

5p b) Știind că $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b & 1-b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sunt două elemente din G , să se calculeze $AB - BA$.

5p c) Să se arate că, dacă $A, B \in G$, atunci $A \cdot B \in G$.

5p d) Știind că $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, să se determine $a \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\det(A^3) = 8$.

5p e) Să se arate că orice matrice din G este inversabilă.

5p f) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale sistemul
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}.$$

SUBIECTUL III (30p) Varianta 61

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $\det(B)$.
- 5p** b) Să se arate că $A^3 = O_3$.
- 5p** c) Să se arate că $(A + I_3)B = B(A + I_3) = I_3$.
- 5p** d) Să se determine inversa matricei B .
- 5p** e) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(B - xI_3) = 0$.
- 5p** f) Să se calculeze $2A + 3A^2 + \dots + 2009A^{2008}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 62

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A - I_2)$.

5p b) Să se calculeze A^2 .

5p c) Să se arate că $A^2 = 5A + 6I_2$.

5p d) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A - xI_2) = 0$.

5p e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^4 = aA + bI_2$.

5p f) Să se determine o matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $AB \neq BA$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 63

În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și submulțimea

$$G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}.$$

- 5p** a) Să se verifice că $A - I_2 \in G$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(A - 3I_2)$.
- 5p** c) Să se verifice că $A^2 = -I_2$.
- 5p** d) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A + xI_2) = 10$.
- 5p** e) Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $B = aI_2 - bA$, atunci $B \in G$.
- 5p** f) Să se găsească o matrice $C \in G$ cu $\det(C) = 16$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 64

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

mulțimea $\mathcal{M}$ a tuturor matricelor pătratice de ordin 3 care au toate elementele numere naturale impare.

5p a) Să se arate că $A + I_3 \notin \mathcal{M}$.

5p b) Să se arate că $A^2 \in \mathcal{M}$.

5p c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\det(A - xI_3) = 0$.

5p d) Să se arate că dacă $B \in \mathcal{M}$, atunci $\det(B)$ se divide prin 4.

5p e) Să se arate că matricea $I_3 + A$ este inversabilă.

5p f) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, astfel încât $(I_3 + A)X = O_3$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 65

Se consideră numerele reale a, b, c și determinantul $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

5p a) Să se calculeze D pentru $a=1, b=2, c=3$.

5p b) Să se arate că dacă $a=b=c$, atunci $D=0$.

5p c) Să se arate că dacă $a+b+c=0$, atunci $D=0$.

5p d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât pentru $b=c=0$ să avem $D=8$.

5p e) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și $a+b+c \neq 0$, atunci D se divide prin $(a+b+c)$.

5p f) Să se rezolve sistemul
$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ 2x+3y+z=11 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases}$$
, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 66

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze suma elementelor matricei $2A$.

5p b) Să se calculeze $\det(I_2 - A)$.

5p c) Să se arate că $A^2 + A = O_2$.

5p d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^4 = aA$.

5p e) Să se calculeze $A + 2A^2 + 3A^3 + \dots + 2009A^{2009}$.

5p f) Să se arate că $(I_2 - A)^{2009} \neq A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 67

Fie mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \mid x \in (0, \infty) \right\}$ și matricea $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(2)$.
- 5p** b) Să se arate că $I_3 \notin \mathcal{M}$.
- 5p** c) Să se demonstreze că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** d) Să se calculeze $A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A\left(\frac{2}{3}\right) \cdot A\left(\frac{3}{4}\right)$.
- 5p** e) Să se arate că, dacă $A(x) \in \mathcal{M}$ și $A(y) \in \mathcal{M}$, atunci $A(x) \cdot A(y) \in \mathcal{M}$.
- 5p** f) Să se determine matricea $A(x) \in \mathcal{M}$ care verifică egalitatea $(A(x))^2 = A(x) \cdot A(4)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 68

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze produsul elementelor matricei $A + I_2$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(A^2)$.
- 5p** c) Să se verifice că $A^2 - 3A - 2I_2 = O_2$.
- 5p** d) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\det(A - xI_2) = -4$.
- 5p** e) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^2 = aA + bI_2$.
- 5p** f) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația $A(X - I_2) = I_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 69

Se consideră numărul real a și matricele $A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Pentru $a = 2$, să se calculeze produsul elementelor matricei A .
- 5p** b) Pentru $a = 2$, să se calculeze $\det(A + I_3)$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $\det(A + I_3) = 0$.
- 5p** d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă.
- 5p** e) Pentru $a = 2$, să se determine inversa matricei A .
- 5p** f) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A^2 - A = B$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 70

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $\mathcal{M}$ a tuturor matricelor de ordin 2 care au toate elementele din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$, diferite două câte două.

- 5p a) Să se calculeze $\det(2A + I_2)$.
- 5p b) Să se calculeze suma elementelor matricei A^2 .
- 5p c) Să se determine inversa matricei A .
- 5p d) Să se arate că $A \in \mathcal{M}$.
- 5p e) Să se determine o matrice $B \in \mathcal{M}$ cu proprietatea că $\det(B) = 10$.
- 5p f) Să se arate că orice matrice din mulțimea $\mathcal{M}$ are determinantul diferit de zero.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 71

Fie numărul $a \in \mathbb{R}$, matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul (S) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + ay + z = 4 \\ x + y + az = 4 \end{cases}$.

- 5p** a) Să se calculeze $A^2 - 3A$.
- 5p** b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.
- 5p** c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului (S).
- 5p** d) Să se demonstreze că pentru $a = 0$ sistemul (S) nu are soluție.
- 5p** e) Pentru $a = 2$, să se arate că soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului (S) verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 3$.
- 5p** f) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, să se rezolve sistemul (S).

SUBIECTUL III (30p) Varianta 72

Fie numerele reale a, b, c și determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze D pentru $a = 1, b = 2$ și $c = 3$.
- 5p** b) Să se arate că dacă $a = b$, atunci $D = 0$.
- 5p** c) Pentru $b = 2$ și $c = 3$, să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $D = 2$.
- 5p** d) Să se demonstreze că $D = (b - a) \cdot (c - a) \cdot (c - b)$.
- 5p** e) Să se arate că dacă $D = 0$, atunci cel puțin două dintre numerele a, b și c sunt egale.
- 5p** f) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 73

Se consideră mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a+1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $3 \cdot I_2 \notin G$.

5p b) Să se calculeze suma elementelor matricei $A(2)$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A(a)) = 1$.

5p d) Să se determine $a > 0$ pentru care matricea $A(a)$ nu este inversabilă.

5p e) Să se determine inversa matricei $A(2)$.

5p f) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică egalitatea $A(2) \cdot X = A(4)$.

SUBIECTUL III(30p) Varianta 74

Se consideră numărul real a , matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$ și sistemul $(S) \begin{cases} x + 2y + 2z = 5 \\ 2x + ay + 2z = 5 \\ 2x + 2y + az = 5 \end{cases}$.

5p a) Să se calculeze $A^2 + 4A$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(1, 1, 1)$ este soluție a sistemului (S) .

5p d) Să se arate că pentru $a = 6$ sistemul (S) nu are soluție.

5p e) Pentru $a = 1$, să se arate că soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului (S) verifică relația $x_0 + y_0 + z_0 = 3$.

5p f) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 6\}$, să se rezolve sistemul (S) .

SUBIECTUL III(30p) Varianta 75

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $A^2 - A$.

5p b) Să se calculeze $\det(A) + \det(3A)$.

5p c) Să se verifice că $X^2 - (a + d) \cdot X + (ad - bc) \cdot I_2 = O_2$.

5p d) Să se arate că dacă $\det(X) = 0$, atunci $X^2 = (a + d) \cdot X$.

5p e) Să se arate că dacă B și X sunt două matrice astfel încât $\det(B) = 0$ și $X^2 = B$, atunci $\det(X) = 0$.

5p f) Să se rezolve ecuația $X^2 = A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 76

Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a+3 \end{pmatrix}$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se verifice că $A - {}^tA = O_2$, unde tA este transpusa matricei A .

5p b) Să se rezolve ecuația $\det(A) = 0$.

5p c) Să se arate că $A^2 = (2a+3)A - (a^2 + 3a - 4) \cdot I_2$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

5p d) Pentru $a = 2$, să se determine inversa A^{-1} a matricei A .

5p e) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = 5A$.

5p f) Să se rezolve sistemul $(A - aI_2) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 77

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = A + mI_2$, $m \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ din ecuația $X + 2A = I_2$.
- 5p** b) Să se calculeze A^2 .
- 5p** c) Pentru $m = -2$ să se arate că matricea B este inversabilă.
- 5p** d) Să se verifice că $AB = BA$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
- 5p** e) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(B) \geq 1$.
- 5p** f) Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3 & b+2 \\ c+1 & d-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, știind că numerele a, b, c, d sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 78

Se consideră matricele $X(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(a) = 3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
- 5p** b) Să se arate că $X(-a) = -X(a)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Să se calculeze $X(-2) + X(-1) + X(0) + X(1) + X(2) + X(3)$.
- 5p** d) Să se verifice că $X(1) \cdot X(10) = X(2) \cdot X(5)$.
- 5p** e) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că matricea $X(a) + I_3$ este inversabilă.
- 5p** f) Să se determine matricele $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $Y \cdot X(a) = X(a) \cdot Y$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 79

Se consideră matricele $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \left\{ A(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$.

5p a) Să se calculeze $A(1, 3) + B$.

5p b) Să se determine $p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât $\begin{pmatrix} 3p - q & q - 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5p c) Să se arate că $B^4 = I_2$.

5p d) Să se calculeze $B + B^2 + B^3 + \dots + B^8$.

5p e) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $A(2, 1) \cdot X = B$.

5p f) Să se determine matricele $A(x, y) \in M$, știind că $x, y \in \mathbb{Z}$ și $\det(A(x, y)) = 1$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 80

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = A + bI_2$ și $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $A + 3I_2$.

5p b) Să se calculeze $I_2 + 2A + 3A^2 + 4A^3$.

5p c) Să se arate că matricea B este inversabilă oricare ar fi $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5p d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât matricea aC să fie inversa matricei $A + 2I_2$.

5p e) Să se demonstreze că matricea B verifică egalitatea $B^3 = 3b^2A + b^3I_2$.

5p f) Să se determine $b \in \mathbb{R}$, astfel încât matricea B să verifice egalitatea $AB + BA = 8A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 81

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ X(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}.$

5p a) Să se calculeze $2X(3,-2,-1) - X(1,2,3).$

5p b) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(2x+3,3,4) = X(x^2,3,4).$

5p c) Să se arate că matricea $X(1,-1,1) \in M$ nu este inversabilă.

5p d) Să se arate că dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, atunci $A \in M$.

5p e) Știind că $X = \begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} z & 0 & 1 \\ 1 & z & 0 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$, să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$, astfel încât $XY = YX$ și

$$\det(X) = 9.$$

5p f) Să se calculeze $\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 2 \\ x_2 & 2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_1 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 82

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $A + 2B$.

5p b) Să se calculeze $A^2 - 2A$.

5p c) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = I_2$.

5p d) Să se arate că matricea $AB - BA$ nu este inversabilă.

5p e) Dacă $m = \det(A + B)$, $n = \det(A + 2B)$, $p = \det(A + 4B)$ să se calculeze $\log_2 m + \log_2 n + \log_2 p$.

5p f) Să se arate că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(A - B)(A + B) = aA + bB$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 83

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$M = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

5p a) Să se arate că dacă $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, atunci $B \in M$.

5p b) Să se arate că matricea $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .

5p c) Să se calculeze $\det(A + 2I_3)$.

5p d) Să se arate că A^2 este inversa matricei A .

5p e) Să se determine $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ din ecuația matricială $(A + I_3) \cdot Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$.

5p f) Fie $X, Y \in M$, $X = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cu $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}^*$ și cu proprietatea că $XY = YX$.

Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sunt în progresie geometrică de rație $q \in \mathbb{R}$, atunci și numerele x, y, z sunt în progresie geometrică de aceeași rație q .

SUBIECTUL III (30p) Varianta 84

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Știind că $B = \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & x-2y \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, să se determine $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $A = B + C$.
- 5p** b) Să se verifice că $A^2 + 2A - 5I_2 = O_2$.
- 5p** c) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\det(A + 2xI_2) = 4$.
- 5p** d) Să se determine $m, n \in \mathbb{R}$, astfel încât $A^3 = mA + nI_2$.
- 5p** e) Să se calculeze inversa matricei A .
- 5p** f) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A .

SUBIECTUL III (30p) Varianta 85

Se consideră matricea $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M = \left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2a & a+1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $X(a) = I_2$.

5p b) Să se calculeze $X(1) - X(2)$.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ să fie soluție a ecuației $X(a) \cdot A = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \end{pmatrix}$.

5p d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(X(a)) \geq 0$.

5p e) Să se arate că $X(a) \cdot X(b) = X(b) \cdot X(a)$, oricare ar fi $X(a), X(b) \in M$.

5p f) Să se calculeze $(X(1))^{2009}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 86

Fie mulțimea $M = \{P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \mid \det(P) \text{ este număr întreg par}\}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că $A \in M$.

5p b) Să se calculeze $2A - I_3$.

5p c) Știind că $X = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ 2a+1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ să se arate că $X \in M$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

5p d) Să se verifice că $A^3 = 7A$.

5p e) Să se determine $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{Z})$ pentru care are loc egalitatea $(A - I_3) \cdot Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$.

5p f) Fie $B = \begin{pmatrix} 2007 & 1 & 4 \\ 2008 & 2 & 5 \\ 2009 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Să se arate că $B \in M$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 87

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = aI_2 + A$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se verifice că $A^2 = I_2$.

5p b) Să se rezolve ecuația $\det(M(a)) = 0$.

5p c) Să se arate că $M(a) \cdot M(b) = M(b) \cdot M(a)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se demonstreze că suma elementelor matricei $M^2(a)$ este pozitivă, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

5p e) Pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ să se determine $(M(a))^{-1}$, inversa matricei $M(a)$.

5p f) Să se demonstreze că pentru $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ soluția (x_0, y_0) a sistemului $M(a) \cdot X = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ verifică relația $x_0 - y_0 = 1$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 88

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $B = A + xI_2$.
- 5p** b) Să se arate că $B^2 = 8A + 5I_2$.
- 5p** c) Să se arate că matricea A aparține mulțimii $C = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X \cdot B = B \cdot X\}$.
- 5p** d) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $A \cdot X = B$.
- 5p** e) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A) = a \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{3} & \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} - 2\sqrt{3} & \sqrt{3} - 2\sqrt{2} \end{vmatrix}$.
- 5p** f) Să se determine valoarea minimă a expresiei $E(x) = \det(A + xB)$, pentru $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 89

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $2A - B$.

5p b) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $xA + yB = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

5p c) Să se verifice că $(A - I_2)^2 = O_2$.

5p d) Să se calculeze inversa matricei A .

5p e) Să se determine $x \in \mathbb{R}$, astfel încât să aibă loc egalitatea $\det(B) = \det(xB + I_2)$.

5p f) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A \cdot X + X \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 90

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $A - B + I_2$.
- 5p** b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $\det(2A) = a \det(A)$.
- 5p** c) Să se arate că $B^3 = 4B$.
- 5p** d) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ știind că matricea $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ este inversa matricei A .
- 5p** e) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația matricială $A \cdot X = B$.
- 5p** f) Să se calculeze $A + B + (A + B)^2 + (A + B)^3 + (A + B)^4$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 91

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea M a matricelor $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu

proprietatea că determinantul matricei X este un număr impar.

5p a) Să se arate că $A \in M$.

5p b) Să se calculeze $A - 2I_3$.

5p c) Să se arate că $A^3 = I_3$.

5p d) Să se arate că $A^{-1} \in M$, unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p e) Fie $B = \begin{pmatrix} 2a-1 & a & 2 \\ -1 & a+1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că $B \in M$ oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

5p f) Să se determine matricele $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A \cdot Y = Y \cdot A$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 92

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea de matrice

$$M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid X \cdot A = A \cdot X\}.$$

5p a) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $A = xB + yI_3$.

5p b) Să se calculeze $\det(A - 3I_3)$.

5p c) Să se arate că $B \in M$.

5p d) Să se arate că matricea $a \cdot A$ aparține mulțimii M oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

5p e) Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ pentru care $(B + A) \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p f) Să se arate că dacă $X, Y \in M$, atunci $X + Y \in M$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 93

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

și mulțimea $M = \left\{ B = \begin{pmatrix} 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

5p a) Știind că $B \in M$, să se calculeze $\det(A) + \det(B)$.

5p b) Să se arate că $A - I_3 \in M$.

5p c) Să se verifice că $B^3 = O_3$, oricare ar fi $B \in M$.

5p d) Fie $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ 0 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea aC să fie inversa matricei A .

5p e) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pentru care $A \cdot X = \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$.

5p f) Să se determine matricele $B \in M$, cu $a, b \in \{0, 1, 2\}$ știind că verifică egalitatea $B^2 = O_3$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 94

Fie mulțimea $M = \left\{ A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ și matricea $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că matricea $I_3 + A(1,2,3)$ aparține mulțimii M .

5p b) Să se determine $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $B = \begin{pmatrix} 2x-3 & 2 & y \\ 5 & y-2 & 2 \\ 4-z & 5 & 8-y \end{pmatrix}$ să aparțină mulțimii M .

5p c) Să se calculeze $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

5p d) Să se arate că matricea $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .

5p e) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\det(A(1,2,0) + xI_3) = 0$.

5p f) Să se arate că dacă $X = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \in M$, atunci $X^2 \in M$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 95

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** a) Să se calculeze $2A - B - I_2$.
- 5p** b) Să se calculeze $\det(A) + \det(B)$.
- 5p** c) Să se verifice că $AB = BA$.
- 5p** d) Să se calculeze inversa matricei A .
- 5p** e) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A + xB) = 20$.
- 5p** f) Să se calculeze $A^7 + B^7$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 96

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 5p** **a)** Să se calculeze $A - 2B$.
- 5p** **b)** Să se determine $p, q \in \mathbb{R}$ știind că $pA + qB = -8I_2$.
- 5p** **c)** Să se arate că $A^2 + 2AB + B^2 = 16I_2$.
- 5p** **d)** Să se calculeze $\det(\sqrt{2}A - \sqrt{2}I_2)$.
- 5p** **e)** Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $C = \begin{pmatrix} -2+x & 2+m \\ 2 & -2+x \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** **f)** Să se calculeze $A^{2009} \cdot B^{2009}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 97

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \mid \det(X) \text{ este număr par} \}$.

5p a) Să se arate că $A + I_3 \in M$.

5p b) Să se verifice că $(A + I_3)^2 = 3A + I_3$.

5p c) Să se calculeze $A + A^2 + A^3 + \dots + A^{12}$.

5p d) Să se rezolve în $\mathbb{Z}$ ecuația $\det(A + xI_3) = 0$.

5p e) Să se arate că $AX \in M$, oricare ar fi $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

5p f) Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Să se arate că $B \in M$ oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 98

Fie mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \mid a, b, x \in \mathbb{R} \right\}$ și matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Pentru $a = 2$, $b = 5$, $x = -2$ să se calculeze $A + 3I_2$.

5p b) Să se determine $a, b, x \in \mathbb{R}$ știind că $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2-b \\ b & a+3 \end{pmatrix}$.

5p c) Știind că $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \in M$ și că $\det(A) = 0$, să se determine $x \in \mathbb{R}$.

5p d) Să se determine $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$, astfel încât $\begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p e) Să se arate că matricea $A \in M$, $A = \begin{pmatrix} x & a \\ b & x \end{pmatrix}$ verifică relația $A^2 - 2xA + (x^2 - ab)I_2 = O_2$.

5p f) Să se determine matricea $X \in M$ știind că $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 99

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se rezolve în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $2A + X = I_2$.

5p b) Să se arate că $A^4 = I_2$.

5p c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că perechea $(2, 1)$ este soluție a sistemului
$$\begin{cases} -2ax + 5by = 6 \\ -ax + 2by = 2 \end{cases}.$$

5p d) Să se calculeze $(2A + A^{-1}) \cdot (A - 2A^{-1})$, unde A^{-1} este inversa matricei A .

5p e) Să se calculeze $\det(A) + \det(A^2) + \det(A^3) + \det(A^4)$.

5p f) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A \cdot X \cdot A^{-1} = A + I_2$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 100

Se consideră matricele $X(a) = \begin{pmatrix} 2a & a+1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru o matrice

$A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează cu $S_1(A)$ suma elementelor din prima coloană, cu $S_2(A)$ suma elementelor din a doua coloană, cu $S_3(A)$ suma elementelor din a treia coloană și cu M mulțimea de matrice $M = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid S_1(A) = S_2(A) = S_3(A)\}$.

5p a) Să se arate că $I_3 \in M$.

5p b) Să se calculeze $X(1) - 2I_3$.

5p c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea $B = \begin{pmatrix} 2a & -7 & 2 \\ 2-2b & 2a-1 & 2 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ să aparțină mulțimii M .

5p d) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că $\det(X(a) + I_3) = 6$.

5p e) Să se arate că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, matricea $C = X(a) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M .

5p f) Să se demonstreze că pentru orice matrice $A, B \in M$, matricea $A + B$ aparține mulțimii M .