

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + e^x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 x f(x) dx$.

5p c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$, unde $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f'(x) - f''(x)$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$ și $F(x) = (x-1)e^x$.

5p a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$, pentru orice $x > 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}} \leq 5^{\sqrt{3}}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, $x \in [0, 2]$.

5p c) Să se calculeze $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

2. Se consideră funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

5p b) Să se determine numărul real $a > 1$ astfel încât $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 6e^a$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$.

5p **a)** Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.

5p **b)** Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $[0; +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

5p **a)** Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **b)** Folosind faptul că $x^2 + e^{-x^2} \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f(-x)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5p b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

5p c) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x + 1$.

5p a) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e f'(x) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $[1, +\infty)$.

5p c) Să se determine numărul real $a \in (1, e^2)$ astfel încât aria suprafeței plane, determinate de graficul funcției f , axa Ox , dreptele de ecuații $x = a$ și $x = e^2$, să fie egală cu $\ln \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5p b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in (0; +\infty) \setminus \{e\}$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f + g$.

5p b) Să se arate că $\int_1^2 (f^2(x) + g^2(x)) dx = \frac{e^4 - e^2 + 1}{2}$.

5p c) Folosind eventual faptul că $2ab \leq a^2 + b^2$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, să se demonstreze că

$$\int_1^2 e^x \cdot \frac{1}{x} dx \leq \frac{e^4 - e^2 + 1}{4}.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Pentru $a = 1, b = c = 0$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5p b) Să se verifice că $f'(0) - f(0) = b$.

5p c) Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ și $f''(0) = 4$.

2. Se consideră integralele $I_n = \int_0^1 \frac{x^n + 1}{x + 1} dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Folosind, eventual, faptul că $x^2 \leq x$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se demonstreze că $I_2 \leq I_1$.

5p c) Să se demonstreze că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se calculeze $f'(0) + f'(2)$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty; 1)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ și $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$.

5p a) Să se verifice că funcția g este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)g(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e \left(f(x) - \frac{\ln x}{x} \right) dx$.

5p b) Să se verifice că $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$.

5p c) Să se arate că șirul care are termenul general $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$, $n \geq 1$ este o progresie aritmetică cu rația 1.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $\int f_1(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x > -1$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$.

5p a) Să se verifice că $I_0 = 1$.

5p b) Să se calculeze I_1 .

5p c) Folosind, eventual, faptul că $1 \leq \ln x \leq 2$ oricare ar fi $x \in [e, e^2]$, să se demonstreze că

$$1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p a) Să se calculeze $f'(e)$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^4 f^2(x) dx$.

5p b) Să se verifice că $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

5p c) Să se demonstreze că $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$, oricare ar fi $m \in [0, 2]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = e^{-x} - 1$ și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să determine $f_1(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0 .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-x} f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right)$, punct care aparține graficului funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0; +\infty)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se verifice că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Să se calculeze I_1 .

5p c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0, 2]$.

5p c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă F a funcției f este concavă pe intervalul $(1, +\infty)$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x$, axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 + (x-1)^2$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = 4x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \ln x$.

5p a) Știind că $g : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \ln x$, să se verifice că $\int g(x) dx = g(x) + C$, $x > 0$.

5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^e x f(x^2) dx = \frac{e^{e^2} + e^2 - e + 1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5p c) Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$, pentru orice $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.

5p c) Să se verifice că $\int_1^2 f'(x) f(x) dx = -\frac{22}{81}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0,1]$.

5p b) Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0;1]$.

5p c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$, pentru orice $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ și $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5p a) Să se arate că $F(x) = -f(x) + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ este concavă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8$, oricare ar fi $x > 1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3^{-x}$.

5p c) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, +\infty)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$.

5p

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

5p

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.

5p

a) Să se calculeze $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$.

5p

b) Să se arate că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[2; +\infty)$.

5p

c) Să se determine a real, $a > 2$ astfel încât aria suprafeței plane, mărginite de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$ și $x = a$, să fie egală cu $\ln 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ și $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_1^2 f(e^x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^2 f(x)F(x) dx = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2 - 1}{4}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

2. Fie $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, pentru $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se calculeze I_0 .

5p b) Să se arate că $I_1 = e^2$.

5p c) Să se demonstreze că $(n+1)I_n + I_{n+1} = e(2^{n+1}e - 1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$, unde $m, n, p \in \mathbb{R}$.

5p a) Pentru $m = 0$, $n = -3$, $p = 2$, să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

5p b) Să se determine $m, n, p \in \mathbb{R}$, știind că $f'(-1) = f'(1) = 0$ și $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} \int_0^x f(t)dt$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f .

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se arate că $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \ln x$ și $g(x) = x \ln x$.

5p a) Să se arate că g este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$.

5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0; +\infty)$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{1004} + 2009^x$.

5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f este concavă pe $(1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se determine $\int (x^2 + 1) \cdot f(x) dx$.

5p b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2e)$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e(e - 1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.

5p a) Să se arate că $f(1) - f'(1) = 1$.

5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$

2. Se consideră integralele $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx$ și $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx$.

5p a) Să se verifice că $I + J = e - 1$.

5p b) Utilizând, eventual, inegalitatea $e^x \geq x + 1$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $J \geq \frac{1}{2}$.

5p c) Să se demonstreze că $I = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.

2. Pentru orice număr natural n se consideră $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Utilizând faptul că $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in [0,1]$, să se arate că $I_{2009} \geq I_{2008}$.

5p c) Folosind, eventual, identitatea $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{R}$, să se arate că $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$.

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

5p a) Să se determine $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx$.

5p b) Să se arate că $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{e^x}$.

5p a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x}$.

5p c) Să se arate că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$, $g(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2008} - x^{2009}$.

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

5p b) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

5p c) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)g(x)dx < 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Utilizând, eventual, inegalitatea $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n$, adevărată pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$, să se

demonstreze că $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x \ln x$ și $g(x) = 2x + \ln x + 1$.

5p a) Să se arate că f este o primitivă a funcției g .

5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x) dx$.

5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - 6}{2}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0$, pentru orice $x \in (0; 1]$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ și $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 (x f(x) + F(x)) dx = F(1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că tangenta la graficul funcției f , dusă în punctul de coordonate $(-2, f(-2))$, este paralelă cu axa Ox .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ e^x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 x f(x^2) dx = \frac{e}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ și $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$.

5p b) Să se demonstreze că $\int g(x) dx = f(x) + C$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Știind că $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se calculeze I_0 .

5p b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5p c) Să se demonstreze că are loc relația $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x + 1$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0; +\infty)$.

5p b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .

5p c) Să se arate că $2 - e \leq f(2) \leq 0$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

5p b) Să se determine $a \in (0,1)$ astfel încât $\int_{-a}^a f(x) dx = 1$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x f(e^x) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1;0)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ și $F(x) = x - \ln x$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx$.

5p c) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (1; +\infty)$

5p b) Să se verifice că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$.

5p c) Să se arate că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$ și $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$.

5p a) Să se arate că $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$.

5p b) Să se verifice că $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2010} + 2010^x$.

5p a) Să se determine $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ și $g(x) = \frac{1}{x}$.

5p a) Să se verifice că $\int_1^e g(x) dx = 1$.

5p b) Folosind identitatea $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$, adevărată pentru orice $x > 0$, să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

5p c) Utilizând inegalitatea $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$, adevărată pentru orice $x \in [1, e]$, să se arate că $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e + 1}{e}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

5p a) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p b) Să se arate că $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ avem $\frac{2}{3} \leq f(x^4) + f(x^2) \leq 2$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^e f(x) dx$.

5p b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că volumele corpurilor obținute prin rotația în jurul axei Ox , a graficelor funcțiilor $g, h : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ și $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ sunt egale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$.

5p a) Să se verifice că $f'(0) = 1$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

5p c) Să se arate că dacă $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$ și $g(x) = xe^x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției g .

5p c) Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, să se demonstreze că funcția g este crescătoare pe I dacă și numai dacă funcția f este convexă pe I .

2. Se consideră funcțiile $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ și $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

5p a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Să se calculeze $\int_1^e f(x) g(x) dx$.

5p c) Să se determine numărul real $a \in (1; +\infty)$ astfel încât $\int_1^a f(x) dx = 2$.

1. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (0; 1) \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{3}{4}$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ și $g(x) = x \ln x$.

5p a) Să se verifice că $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$.

5p b) Să se arate că $\int_1^2 g(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

5p c) Să se arate că există $x_0 \in (1; 2)$ astfel încât $f(x_0) > g(x_0) + 3$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1; +\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$.

5p c) Folosind faptul că $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$, oricare ar fi $x \in [1, \sqrt{2}]$, să se demonstreze inegalitatea $x^2 - x \leq 2 \ln x$, pentru orice $x \in [1, \sqrt{2}]$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$.

5p a) Să se arate că $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Să se calculeze I_1 .

5p c) Să se demonstreze că $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.

5p a) Să se arate că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in (1; +\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$.

2. Se consideră $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)} dx$, unde $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Să se verifice că $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

5p b) Utilizând identitatea $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ adevărată pentru orice $x \neq 0$, să se determine I_1 .

5p c) Să se arate că $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)\ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ și $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$.

5p a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .

5p b) Să se calculeze $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ e^x, & x < 0 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe intervalul $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ și $g(x) = x$.

5p a) Să se determine $\int f(\sqrt{x}) dx$, $x \in [0; \infty)$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) \cdot g(x) dx$.

5p c) Să se verifice că $\int_0^1 f(x^{50}) \cdot g^{99}(x) dx = \frac{e-1}{100}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5p c) Să se determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + \dots + f(e^{x^{2009}})}{x^{2009}}$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 + 2x$ și $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței plane mărginite de graficul funcției $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{f(x) - x^2 - 2x}{e^x + 1}, \text{ axa } Ox \text{ și dreptele de ecuații } x = 0 \text{ și } x = 1.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$, unde a este parametru real.

5p a) Să se determine valoarea reală a lui a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 4$.

5p b) Să se calculeze $f'(9)$.

5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(9,3)$.

2. Pentru oricare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ și $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

5p a) Să se determine $f_1(x)$, unde $x \in [0, \infty)$.

5p b) Să se demonstreze că $\int_1^e f_1(x) \cdot \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_2(x)$, $x \in [0,1]$.

SUBIECTUL III (30p)

- 5p** **1. a)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1}$.
- 5p** **b)** Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 6x^2 + 18x + 12$.
- 5p** **c)** Se consideră funcția $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 - 1) \ln x$. Să se demonstreze că $g(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.
- 2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$
- 5p** **a)** Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.
- 5p** **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p** **c)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x f(x^2)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ și $g(x) = \frac{x - 1}{e^x}$.

5p a) Să se verifice că $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 0$.

5p b) Să se determine coordonatele punctului de extrem al funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $g(x) - f(x) \leq 1 + \frac{1}{e^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ și $g(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

5p c) Să se arate că există $x_0 \in (0; 1)$ astfel încât $f(x_0) < g(x_0) - 2x_0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3^x + 1, & x \leq 1 \\ ax + 2, & x > 1 \end{cases}$.

5p a) Să se determine valoarea parametrului real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((f(x) - 1) \cdot x)$.

2. Se consideră funcția $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

5p a) Să se determine funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât funcția F să fie o primitivă pentru funcția f .

5p b) Să se demonstreze că funcția F este descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 F(x) dx \leq \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)}$.

5p c) Să se arate că $e^{\sqrt{2009}} + \sqrt{2010} \leq e^{\sqrt{2010}} + \sqrt{2009}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ și $g(x) = f''(x)$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^2 (x+1) f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 g(x) dx$.

5p c) Să se determine primitiva funcției g a cărei asimptotă spre $+\infty$ este dreapta de ecuație $y = 2x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ex - 1$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție dintre tangenta la graficul funcției f în punctul $O(0,0)$ și dreapta de ecuație $x=1$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că dacă $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$, unde a, b, c sunt numere reale și funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci numerele $F(a), F(b), F(c)$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $\sqrt{x} \geq 1 + \ln \sqrt{x}$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

5p 2. a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 + t + 1) dt}{x^3 + 1}$.

5p b) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Să se determine primitiva $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică relația $F(1) = 0$.

5p c) Să se determine numărul real pozitiv a știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ este egal cu 5π .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$.

5p c) Să se determine asimptota orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f .

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$ și $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Să se calculeze I_1 .

5p c) Să se demonstreze că $I_n + nI_{n-1} = e$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

- 5p 1. a) Să se studieze continuitatea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ în punctul $x_0 = 1$.
- 5p b) Să se calculeze derivata funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$.
- 5p c) Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n}$.
- 5p a) Să se calculeze $\int_1^2 f_0(x) dx$.
- 5p b) Pentru $n \in \mathbb{N}$ să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f_n , axa Ox și dreptele $x=1$, $x=2$.
- 5p c) Știind că F este o primitivă a funcției f_1 , să se arate că funcția $G : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$ este crescătoare.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - x \ln 2$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

5p c) Să se determine punctul de extrem al funcției f .

5p 2. a) Să se determine primitivele funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$g : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{x}}.$$

5p c) Să se calculeze $\int_1^3 \frac{1}{x(x+2)} dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

2. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)$.

5p c) Să se arate că dacă, $a > 0$, atunci $\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [1, +\infty)$.

5p b) Să se studieze monotonia funcției f pe $[1, +\infty)$.

5p c) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, e)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive.

5p b) Să se calculeze $\int_{-3}^{-2} f(x) dx$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $m \in [-1, \infty)$ aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = m$ și $x = m+1$ este cel puțin $\frac{5}{4}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ și $h(x) = f^2(x)$.

5p a) Să se verifice că $h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că funcția h este crescătoare pe intervalul $[0; +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$.

5p a) Să se arate că $\int_0^1 (x+1)(x+3) f(x) dx = \frac{22}{3}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se determine numărul real pozitiv k astfel încât aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=k$ să fie egală cu $k + \ln k$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) + f(x^3) \geq -2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

5p c) Să se determine numărul real p astfel încât volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(px)$, pentru orice $x \in [0,1]$ să fie minim.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x+2}, & x \geq 0 \\ x + \frac{3}{2}, & x < 0 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, 2 \right)$, oricare ar fi $x \in [0; +\infty)$.

5p 2. a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x} dx$.

5p b) Să se demonstreze că $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \leq 1$.

5p c) Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ și numerele reale pozitive a , b și c . Să se

demonstreze că, dacă numerele $\int_1^a f(x) dx$, $\int_1^b f(x) dx$, $\int_1^c f(x) dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci numerele a , b , c sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ și $g(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$.

5p a) Să se calculeze $f'(x) - g'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, F: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ și $F(x) = e^x + x - \ln x$.

5p a) Să se demonstreze că funcția F este o primitivă pentru funcția f .

5p b) Să se calculeze $\int_1^2 x(F(x) - x + \ln x) dx$.

5p c) Să se determine parametrul real m astfel încât aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ să fie egală cu $e^m - 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-2}, & x \in (-\infty, 1] \\ \ln x - 2, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 (x-2) f(x) dx$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x (f(t) + 2) dt$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0; +\infty)$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p c) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

5p a) Pentru $n = 2$ să se calculeze $\int_1^2 f(x) dx$.

5p b) Pentru $n = -1$ să se determine $a \in [0; +\infty)$ astfel încât $\int_0^a f(x) dx = 0$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 f'(x) f(x) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe $(0, +\infty)$.

5p c) Să se determine coordonatele punctului graficului funcției f , în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

5p a) Să se verifice că $\int (x+1)(x+2) f(x) dx = x^2 + 3x + C$, $x \geq 0$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - f(x+1) - \frac{1}{x+1}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \ln x$ și $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$.

5p a) Să se determine funcția f_1 .

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f_2 .

5p c) Să se arate că $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^*$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$.

5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x^2 + 1}, & x \leq 1 \\ \frac{2x + a}{x^2 + 2}, & x > 1 \end{cases}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine numărul real a astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 1$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficului funcției f .

5p c) Să se determine numărul real a astfel încât panta tangentei la grafic în punctul $(2; f(2))$ să fie egală cu 1.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

5p a) Să se verifice că $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x f(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcțiile $f, h: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-2)$ și $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p a) Să se arate că $h(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$.

5p b) Să se demonstreze că funcția h este descrescătoare pe $(-\infty; 1)$.

5p c) Să se arate că $(f'(x))^2 \geq f(x) \cdot f''(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2009} + x + 1$.

5p a) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $h: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $h(x) = f(x) - x^{2009} - 1$.

5p b) Să se determine primitiva $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției f , care verifică condiția $F(0) = 1$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^{2010}}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1}, & x \leq 0 \\ -2x + 1, & x > 0 \end{cases}$.

5p a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0)$.

5p c) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^n}$.

5p a) Să se verifice că $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = 1$.

5p b) Să se determine primitiva G a funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1) = \frac{13}{15}$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.

5p b) Să se arate că $2009\sqrt{2011} \leq 2010\sqrt{2010}$.

5p c) Să se arate că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x < 1 \\ (x+1)\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se verifice că $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{6}$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției

$$h : [1; e] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{f(x)}{x+1}.$$

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 3) \ln x$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

5p **c)** Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \cdot e^x$ și $f(x) = (x + 1)e^x$.

5p **a)** Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției F , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p **c)** Să se calculeze $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2008}) \leq f(\sqrt[3]{2009})$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$ și $g(x) = x \cdot e^x$.

5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + 3^x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine asimptota spre $-\infty$ a funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1) \cdot f_2(x) dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln 2$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 4$, pentru orice $x \in (1; +\infty)$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$.

5p a) Să se calculeze $\int f_0(x) dx$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; -1)$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq -1$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + 1$ să fie o primitivă a funcției f_a .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 e^x f_1(x) dx$.

5p c) Să se demonstreze că $\int_0^1 f_a^2(x) dx \geq \frac{1}{4}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; -2)$.

5p c) Să se demonstreze că $x + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 3$ pentru orice $x > 0$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = e^{x^n}$.

5p a) Să se determine $\int f_1(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x \cdot f_1(x) dx$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot f_3(x)$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, unde $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

5p a) Să se determine $\int f(x) dx$, unde $x > 0$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f(x)$, $x \in [1, 2]$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^e f(x) \ln x dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(x) \geq \frac{1}{e}$ pentru orice $x \leq 2$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2}$.

5p a) Să se determine $\int f^2(x) dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că $\int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2010}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^x + e^{-x}$.

5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = x f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției g .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$.

5p c) Să se arate că $\ln x \leq \frac{x}{e}$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \sqrt{x}$.

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

5p c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x} \geq x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = (x + 1)(x + 3) \cdot e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(-2) + f(-4) \leq \frac{8}{e^3}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f admite primitive.

5p b) Să se demonstreze că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(1; +\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\int_0^e f(x) dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

5p a) Să se calculeze $f'(1)$.

5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .

5p c) Să se arate că $f(x) \leq 3$, pentru orice $x \leq 2$.

2. Se consideră funcțiile $f, F : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ și $F(x) = x + \frac{1}{x}$.

5p a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = 2$.

5p c) Să se calculeze $\int_1^e F(x) \cdot \ln x \, dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

5p **a)** Să se calculeze $f'(1)$.

5p **b)** Să se determine intervalele de concavitate și intervalele de convexitate ale funcției f .

5p **c)** Să se arate că $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \geq -\frac{1}{2}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = e^{1-x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

5p **b)** Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x \cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p **c)** Să se arate că $\int_0^{\frac{1}{2}} (g(x) - f(x)) dx \geq 0$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; 2)$.

5p c) Să se arate că $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, pentru orice $x > 0$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$.

5p a) Să se determine mulțimea primitivelor funcției f_2 .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

5p c) Să se arate că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x > 0$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2 - x)^n$.

5p a) Să se determine $\int_0^2 f_1(x) dx$, unde $x \in [0, 2]$.

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x) \cdot e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 2$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_5 .

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p **b)** Să se determine asimptota verticală la graficul funcției f .

5p **c)** Să se demonstreze că $e^x \geq ex$, pentru orice $x > 0$.

2. Fie funcția $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

5p **a)** Să se determine mulțimea primitivelor funcției f .

5p **b)** Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f .

5p **c)** Să se calculeze $\int_1^2 f(x) \cdot \ln x \, dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $O(0;0)$.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$.

5p a) Să se determine $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} dx$.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f_1 .

5p c) Folosind, eventual, faptul că $\sqrt{x+1} \geq 1$, oricare ar fi $x \in [0;1]$, să se arate că $\int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{1}{2010}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot e^x$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = (x+1) \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine intervalele de convexitate și intervalele de concavitate ale funcției f .

5p c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $-\infty$ la graficul funcției f .

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n + x + 2}{x+1}$.

5p a) Să se determine $\int x \cdot f_1(x) dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x) dx$.

5p c) Să se arate că aria suprafeței plane, cuprinse între graficul funcției f_{2008} și axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$, este mai mică sau egală cu 2.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$ și $g(x) = \sqrt{1-x}$.

5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției g , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se calculeze $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot \ln x dx$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(2008) \geq f(2009)$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

5p a) Să se determine $\int f(x) dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + 1}$,

axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției

$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$, unde $x \in [0, 1]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că $f(\sqrt[3]{2009}) \leq f(\sqrt[3]{2010})$.

2. Fie funcția $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

5p a) Să se determine $\int f'(x) dx$.

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

5p c) Să se arate că $\int_1^e e^x f(x) dx \leq e^e - e$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x > 1$.

5p **b)** Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2; e^2)$.

5p **c)** Să se demonstreze că $f(x) \geq e^2$, pentru orice $x > 1$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$.

5p **a)** Să se verifice că $\int_1^4 f_1(x) dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)} dx$.

5p **c)** Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției $g : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1; 0)$.

5p c) Să se arate că $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$, pentru orice $x > 0$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 (x+1) \cdot f(x) dx$.

5p b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p c) Folosind faptul că $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ pentru orice $x \in [0, 1]$, să se arate că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox , a graficului funcției f , este un număr din intervalul $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

5p a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

5p b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Să se arate că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$.

5p a) Să se determine $\int_0^1 f_0(x) \cdot e^{-x} dx$.

5p b) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_1 , axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.

5p c) Să se arate că $\int_0^1 f_{2008}(x) dx + \int_0^1 f_{2010}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2009}(x) dx$.